Hochschule Bremen
Fachbereich E-Technik & Informatik

Gourmet Course
Feinschmecker-Speise

Prof. Dr. Th. Risse
Prof. Dr. L. Hinsenkamp

Sinn & Zweck Der Gourmet Course ist für Studienanfänger und Fortgeschrittene gedacht, die vom Vorkurs-Test einfach unterfordert sind, die sozusagen den Hals nicht voll kriegen können und deren mathematischer (Wissens-) Durst sonst nicht zu stillen ist.

hinsenk@hs-bremen.de
risse@hs-bremen.de
Letzte Änderung: 19. März 2004
Version 0.3

Inhaltsverzeichnis

0. Hinweis an die geschätzten Gäste

Im folgenden finden Sie eine Reihe von mathematischen Problemen, die teileweise – wie im Vorkurs-Test – als multiple choice Fragen zum Ankreuzen gestellt sind. Probleme, die sich nicht in das multiple choice Schema pressen lassen, sind als klassische Aufgaben gestellt und in hoffentlich verdauliche Häppchen zerlegt.

Online-Course

Unter `www.weblearn.hs-bremen.de/risse/MAI/docs/` ist dieses Dokument `gourmet.pdf` wie auch `vorkurs.pdf` als pdf-Datei verfügbar. Erst am Bildschirm können Sie die Interaktivität aller dieser Dokumente nutzen. Zum Lesen, zur Ausführung, eben zum browsen ist Acrobat Reader in der Version 4.0 oder besser notwendig, den Sie von `www.adobe.com` downloaden können.

1. Appetizers

- **Logarithmisches**

Beginn Aufgabe einige Logarithmen berechnen

1. $\log_a \sqrt[3]{a^2}$

☐ $3/2$ ☐ $\frac{3}{2}a$ ☐ $\frac{2}{3}a$ ☐ $0.\bar{6}$

2. $\log_{1/a} a^2$

☐ -2 ☐ 2 ☐ $1/\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{2}$

Ende Aufgabe Punkte: Richtig

• Algebraisches

Aufgabe

1. Wieviele Lösungen $y(x)$ hat die Gleichung $y^x = x^y$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

2. Wieviele Lösungen x hat die Gleichung $2^{\sin^2 x} = \sin x$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) ∞

3. Wieviele unterschiedliche Werte hat $z = uv + 1/(uv)$ für $u + 1/u = x$ und $v + 1/v = y$ und $|x|, |y| > 2$.

(a) -2 (b) 2 (c) $1/\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

4. Löse die Gleichung $(12^x)^{x+1} = 5$.

(a) -2 (b) 2 (c) $1/\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

• Symbolisches

Beginn Aufgabe Ausdrücke vereinfachen und programmieren ...

1. Vereinfachen und programmieren Sie den Ausdruck $\frac{1}{1-\frac{1}{1-1/x}}$

2. Vereinfachen und programmieren Sie den Ausdruck $\frac{1}{1-\frac{1}{1+1/x}}$

3. Vereinfachen und programmieren Sie den Ausdruck $\frac{\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1+1/x}}$

Ende Aufgabe Punkte: Richtig

Dabei ist jeweils korrekt!

• Diophantisches

Aufgabe

1. Ein Geschenkkorb mit 20 Geschenken kostet 720DM. Er enthält drei Geschenk-Arten à 10DM, 50DM und 60DM.
Wieviele Geschenke einer jeden Art enthält der Geschenkkorb?

(a) 8,8,4 (b) 11,5,4 (c) 7,7,6 (d) 9,3,8

2. Wieviele Paare natürlicher Zahlen (x, y) gibt es, sodaß die Summe der dritten Potenzen dieser Zahlen gleich dem Quadrat der Summe der beiden Zahlen ist, also mit $x^3 + y^3 = (x + y)^2$?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) ∞

3. Mindestens wieviele Primzahlen ergeben sich als Funktionswerte des Polynoms $f(x) = x^2 + x + 41$ für $x = 0, 1, 2, \ldots$?

(a) 11 (b) 13 (c) 37 (d) 39 (e) 41 (f) ∞

4. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $(p^2 - q)^2 = (p + q)^2$, wenn p und q Primzahlen sind?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4 (f) ∞

• Diverses

Aufgabe

1. Ganoven haben jede Mengen Stoffballen gestohlen. Sie streiten, wie die Beute zu verteilen ist. Wenn nun jeder Ganove sechs Ballen bekommt, bleiben fünf Ballen übrig, wenn jeder Ganove sieben Ballen bekommt, fehlen acht Ballen.
Wieviele Stoffballen (b) und wieviele Ganoven (g) gibt es?

(a) b=17, g=9 (b) b=83, g=13 (c) b=23, g=11 (d) b=12, g=19

2. Die berühmte Ackermann-Funktion ist rekursiv gegeben:

$$A(0,n) = n+1 \qquad\qquad A(m+1,0) = A(m,1)$$

$$A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n))$$

Berechne $A(2,1)$.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5 (f) 6 (g) 7

3. Berechnung von $A(2,1)$ in wievielen Rekursionsschritten?

(a) 7 (b) 12 (c) 14 (d) 17 (e) 55 (f) 69 (g) 71

2. main courses

- **Algebraisches**

Aufgabe

1. Löse die Gleichung $\left(12^x\right)^{x+1} = 5$ in x.

(a) $\approx 11/25$ (b) $\approx 25/11$ (c) $\approx -25/36$ (d) $\approx -36/25$

2. Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) ∞

3. Gesucht ist eine zweistellige Dezimalzahl x. x^2 ist eine dreistellige Dezimalzahl. Umkehren der Reihenfolge der Ziffern von x^2 liefert eine Dezimalzahl $U(x)$, deren Wurzel gerade die Dezimalzahl ist, die sich durch Umkehrung der Ziffern von x ergibt.
Wieviel derartige x mit $U(x^2) = U^2(x)$ gibt es?

(a) 0 (b) 3 (c) 6 (d) 7 (e) 8 (f) ∞

Problem 1. Die Folge $(f_n)_{n=0,1,\ldots}$ der *Fibonacci*[1]-Zahlen ist rekursiv durch $f_o = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$ definiert – s.a. www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.

(a) Für $n \geq 0$ gilt $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

(b) $\Phi := \lim_{n\to\infty} f_n/f_{n-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1.618034$ ist der sogenannte *goldene Schnitt*. $\phi := \Phi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618034$. Es gilt u.a. $\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{\Phi}$ sowie $\phi = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} = \frac{1}{\phi}$ und daher zwangsläufig $\Phi \cdot \phi = 1$ und eben $x^2 - x - 1 = (x-\Phi)(x+\phi) = 0$.

(c) Mit $\binom{n}{k} := 0$ falls $n < k$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} = f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$.

(d) $\sum_{i=k}^{n} f_i = f_{n+2} - f_{k+1}$, $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n\, f_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{2n} f_i\, f_{i-1} = f_{2n}^2$ und $\sum_{i=1}^{2n+1} f_i\, f_{i-1} = f_{2n+1}^2 - 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\, f_i = 2$, etc.

[1] Leonardo Pisano, genannt Fibonacci (1180?-1250?)

Problem 2. $(F_n)_{n=0,1,\ldots} = 2^{2^n} + 1$ ist die Folge der *Fermat*[2]-Zahlen, $F_o = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, $F_5 = 641 \cdot 6700417$ usw. – so entstand ein Wettbewerb, die sehr großen Fermat-Zahlen zu faktorisieren, s.a. `www.google.de/search?q=Fermat+numbers`.

(a) Für $n \geq 1$ gilt $F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$.

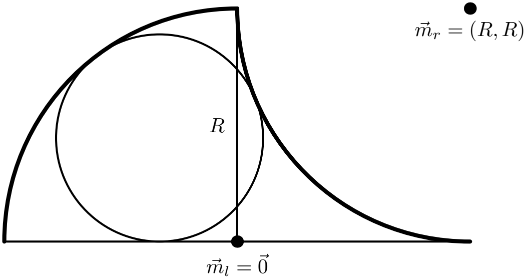
(b) Fermat-Zahlen sind paarweise relativ prim, d.h. $\mathrm{ggT}(F_n, F_m) = 1$ für $n \neq m$, mit der Folge: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

[2] Pierre de Fermat (1601-1665)

• Geometrisches

Aufgabe

1. Der Viertelkreis mit Radius R im 2. Quadranten (links oben) und der Viertelkreis mit Radius R im 3. Quadranten (links unten) werden aneinandergehängt.



Wie groß ist der Radius r des einbeschriebenen Kreises?

(a) $\frac{2}{3}\,R$ (b) $\frac{1}{2}\,R$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,R$ (d) $\frac{4}{9}\,R$

Problem 3. Wie müssen die Zahnflanken aussehen, damit die Zähne zweier ineinandergreifender Zahnräder aufeinander abrollen?

(a) Wie sieht der sogenannte *Schmiege-Kreis* an (den Graphen) eine(r) Funktion $y = f(x)$ in $(x_o, y_o) = \big(x_o, f(x_o)\big)$ aus, der durch (x_o, y_o) verläuft und dessen erste beiden Ableitungen mit denen von f übereinstimmen? Was ist die Krümmung κ von f ?

(b) Wie sehen Schmiege-Kreise an eine in Parameter-Darstellung gegebene Funktion $\big(x(t), y(t)\big)$ aus? Was ist deren Krümmung κ ?

(c) Die Krümmung $\kappa = \frac{d\,\alpha}{ds}$ ist die Änderung des Steigungswinkels pro Änderung der Länge des Graphens bzw. der Kurvenlänge.

(d) Die Krümmung κ ist translationsinvariant.

(e) Mit der Kurvenlänge s gilt $\xi = x - \frac{1}{\kappa}\,\frac{d\,y}{ds}$ und $\eta = y + \frac{1}{\kappa}\,\frac{d\,x}{ds}$ für den Mittelpunkt (ξ, η) der Schmiege-Kreise.

(f) Für Krümmung κ und Kurvenlänge s einer Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ gilt $\frac{d^2\,x}{ds^2} = -\kappa\,\frac{d\,y}{ds}$ und $\frac{d^2\,y}{ds^2} = \kappa\,\frac{d\,x}{ds}$ (Frenet[3]-Serret[4]sche Formeln im $\mathbb{R}^2$).

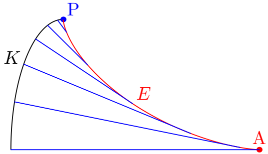
---

[3] Jean Frédéric Frenet (1816-1900)

[4] Joseph Alfred Serret (1819-1885)

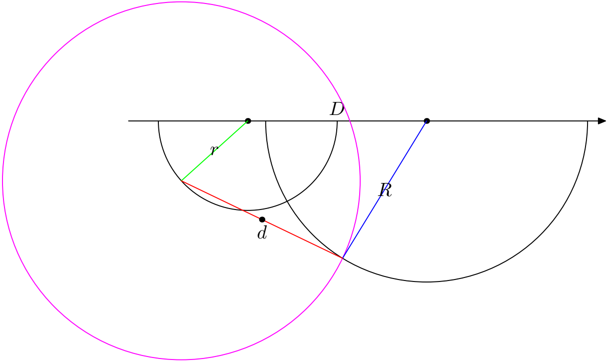
(g) Sei *Evolvente* die ursprüngliche Kurve und *Evolute* die Kurve der Krümmungsmittelpunkte, d.h. der Mittelpunkte der Schmiege-Kreise. Es gilt:
i) die Normalen der Evolvente sind Tangenten an die Evolute.
ii) die Evolute ist die Hüllkurve der Normalen der Evolvente.

(h) Beim Abwickeln eines straff gespannten Fadens (von A nach P um eine Evolute E gespannt) beschreibt der Punkt P eine Evolvente K, d.h. die Evolute von K ist E.



(i) Wieso rollen die Zähne zweier Zahnräder aufeinander ab, wenn die Zahnflanken Kreis-Evolventen sind?

Problem 4. Welche Kurven beschreiben Punkte auf der Stange einer Doppelschaukel mit Radien r und R und Abständen d und D ?

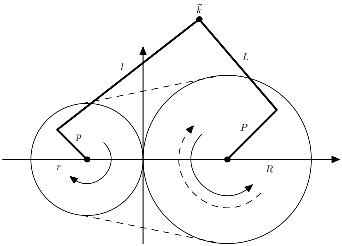


(a) Für welche Kenngrößen r, R, d und D ist Schaukeln überhaupt möglich? Welche Kurven lassen sich trivialerweise erzeugen?

(b) Wie sehen die Schnittpunkte von Kreisen aus?

(c) Wie sehen Beispiele der gesuchten Kurven aus?

Problem 5. Zwei Zahnräder mit Radien r bzw. R greifen ineinander. An jedem ist im Abstand p bzw. P ein Pleuel der Länge l bzw. L montiert. Die freien Pleuel-Enden sind drehbar miteinander verbunden.



(a) Welche Kurven kann dieser sogenannte Koppel-Punkt beschreiben, wenn eines der Zahnräder angetrieben wird?
(b) Welche Kurven können **nicht** überstrichen werden?
(c) Was passiert, wenn statt Zahnrädern Riemenscheiben verwendet werden?
(d) Welche Objekte können **nicht** überstrichen werden?

• Kombinatorisches

PROBLEM 6.

(a) Was ist die minimale Anzahl von Party-Gästen, so daß sicher ist, daß mindestens drei Gäste sich untereinander kennen oder daß mindestens drei Gäste einander fremd sind.

(b) Der König von Logarithmus gibt eine große Fete. Alle kommen, die rechnen (können): Madame Quadratwurzel, Prinz Potenz und viele Andere. Die Gäste kommen einzeln und in Gruppen und schütteln sich chaotisch, also zufällig die Hände.
Zeige: die Anzahl der Leute, die ungerade viele Hände geschüttelt haben, ist gerade.

Problem 7. Eine (endliche oder unendliche) Folge $(w_i)_{i=1,2,\ldots}$ natürlicher Zahlen heißt *überzunehmend* (*superincreasing sequence, sis*) genau dann, wenn $w_i > \sum_{j=1}^{i-1} w_j$ für alle $i > 1$.

(a) In welchem Verschlüsselungsverfahren können superincreasing sequences als Schlüssel verwendet werden?

(b) Wie groß ist der Schlüsselraum? d.h. wieviele Schlüssel gibt es für dieses Verschlüsselungsverfahren? z.B. wieviele superincreasing sequences $(w_i)_{i=1,2,3,4}$ bestehend aus vier 8-bit Zahlen gibt es?

(c) Wie kann vorstehendes Ergebnis verallgemeinert werden?

(d) Was spricht alles **gegen** dieses Verschlüsselungsverfahren?

3. Harte Brocken, schwer zu knacken und zu verdauen

- **Algebraisches**

PROBLEM 8.

(a) Löse die Gleichung

$$2^{3^{4^x}} = 4^{3^{2^x}}$$

oder – wenn man die Klammerung noch deutlicher machen will

$$\mathrm{pow}(2, \mathrm{pow}(3, \mathrm{pow}(4, x))) = \mathrm{pow}(4, \mathrm{pow}(3, \mathrm{pow}(2, x)))$$

(b) Löse das 'ziemlich' nicht-lineare Gleichungssystem

$$\log_x(xy^2) + \log_y(yx^2) = 6$$

$$\sin(x + 2y) + \sin(2x + y) = 0$$

4. sweets

• Geometrisches

Problem 9.

(a) Man hat 6 Blatt Papier. Einige der Blätter werden in je sieben Teile zerschnitten. Danach werden einige dieser Teile wieder in sieben Teile zerschnitten. Man zählt nun 67 Papier-Schnipsel. Wieso hat man sich verzählt?

(b) Läßt sich ein Land so in vier Teile zerlegen, daß je zwei der vier Teile eine gemeinsame Grenze haben?

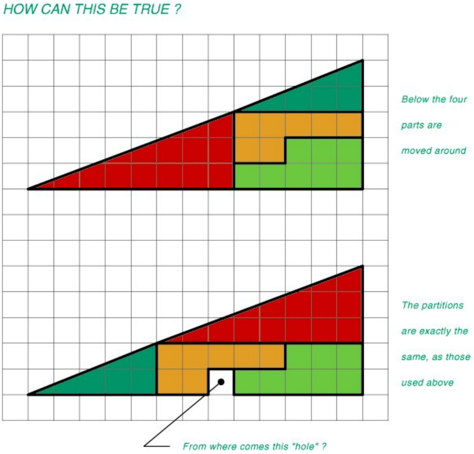
(c) Läßt sich ein Land so in fünf Teile zerlegen, daß je zwei der fünf Teile eine gemeinsame Grenze haben?

(d) Wie können drei kongruente Zylinder mit Höhe a und Durchmesser $a/2$ in einem Würfel mit Kantenlänge a so platziert werden, daß keiner wackelt?

(e) Auf jede Seite eines regelmäßigen Tetraeders wird eine Pyramide aufgesetzt, die das Dreieck des Tetraeders als Grundfläche hat.

Welches geometrische Objekt entsteht, wenn die Seiten je zweier Pyramiden mit gemeinsamer Kante in einer Ebene liegen?

(f) Wie kann das sein?



• Logisches

Problem 10.

(a) Wem gehört der Fisch? unter folgenden Bedingungen

- Es gibt 5 Häuser in je einer anderen Farbe;
- in jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität;
- jeder Hausbewohner bevorzugt ein anderes Getränk, raucht Zigaretten einer anderen Marke und hält ein anderes Haustier.

und bei folgenden gegebenen Sachverhalten

1. der Brite lebt im roten Haus,
2. der Schwede hält einen Hund,
3. der Däne trinkt Tee,
4. das grüne Haus steht links vom weißen Haus,
5. der Bewohner des grünen Hauses trinkt Kaffee,
6. der Zigarren-Raucher hält einen Vogel,
7. der Mann im mittleren Haus trinkt Milch,
8. der Bewohner des gelben Hauses raucht Hasch,
9. der Norweger wohnt im ersten Haus,
10. der Pfeifen-Raucher wohnt neben dem Katzen-Halter,
11. der Pferde-Halter wohnt neben dem Hasch-Raucher,

12. der Zigarillo-Raucher trinkt Bier,
13. der Norweger wohnt neben dem blauen Haus,
14. der Deutsche raucht Zigaretten,
15. der Pfeifen-Raucher hat einen Wasser trinkenden Nachbarn.

- **Paradoxes**

PROBLEM 11.

(a) Epimenides[5] Paradox: Sagt der Kreter: 'Ich lüge.'
(b) Eubolides[6] Paradox: 'Diese Aussage ist falsch.'
(c) Zenon[7]s Paradox: Achill holt die Schildkröte nie ein.
(d) Krokodils Paradox: Das Krokodil stiehlt ein Kind und sagt zum Vater: 'Ich werde Dir Dein Kind genau dann zurückgeben, wenn Du korrekt vorhersagst, ob ich es herausrücke oder nicht.' Prophezeit der Vater: 'Du wirst es nicht zurückgeben.'
(e) Grelling-Nelson[8] Paradoxien: das Wort 'einsilbig' hat drei Silben!
(f) Bolzano[9]s Paradox: $|[a,b]| = |[d,e]|$

---

5 Epimenides (6. Jhrdt v. Chr.)
6 Eubolides (4. Jhrdt v. Chr.)
7 Zeno(n) von Elea (ca 490-ca 425 v. Chr.)
8 Kurt Grelling, Leonhard Nelson 1908
9 Bernhard Placido Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Problem 12.

(a) Cantor[10]s Paradox: für $\aleph_o = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ gilt $\aleph_o \times \aleph_o = \aleph_o$ etc.
Für $\aleph_o < \aleph_1 = |\mathbb{R}|$ gilt $\aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$ etc.

(b) Hilbert[11]s Paradox: Ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern sei voll belegt. Dann sind noch immer unendlich viele Zimmer frei!

(c) Russell[12]s Paradox: Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selber rasieren. Rasiert er sich selbst?
Sei $R = \{M : M \notin M\}$. Frage: $R \in R$?
Sei A die Allmenge, d.h. die Menge aller Mengen. Frage: $A \in A$?

(d) Banach[13]-Tarski[14] Paradox: Eine Kugel mit Radius r läßt sich in endlich viele Teile zerlegen, die zusammengesetzt zwei Kugeln mit Radius r ergeben.

Weitere Paradoxe s. `http://mathworld.wolfram.com/Paradox.html`

---

[10] Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918)
[11] David Hilbert (1862-1943)
[12] Bertrand Arthur William Russel (1872-1970)
[13] Stefan Banach (1892-1945)
[14] Alfred Tarski (1902-1983)

5. Literatur

Hier sind einige weiterführende Buchtitel aufgelistet:

David L. Goldstein, Judith R. Goldstein: Feynmans verschollene Vorlesung. Die Bewegung der Planeten um die Sonne; Piper ISBN 3-492-22994-8

Georges Ifrah: Universalgeschichte der Zahlen; Campus, ISBN 3-88059-956-4

Heinz Junge (Hrsg): Sammlung Mathematischer Aufgaben mit Lösungen. Harri Deutsch ISBN 387144349 2

Andrej G. Konforowitsch: Logischen Katastrophen auf der Spur; Fachbuchverlag Leipzig ISBN 3-343-00831-1

Charles Seife: Zwilling der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null; Berlin Verlag ISBN 3-8270-0314-8

Ian Stewart: Die Zahlen der Natur; Spektrum ISBN 3-8274-1123-8

6. Ausblick

Wenden Sie sich bei Fragen, Schwierigkeiten mit unserem Angebot, mit Anmerkungen, Kritik und Verbesserungsvorschlägen getrost an

Prof. Dr. L. Hinsenkamp, ZIMT 428, 5905-5494 am besten per web/e-mail
http://www.weblearn.hs-bremen.de/hinsenkamp
mailto: hinsenk@hs-bremen.de

oder an mich

Prof. Dr. Th. Risse, ZIMT 244, 5905-5489 bzw. am besten per web/e-mail
http://www.weblearn.hs-bremen.de/risse
mailto: risse@hs-bremen.de

Selbstverständlich freuen wir uns über jede Zusendung weiterer origineller Aufgaben oder besserer Lösungen.

Lösungen zu Problemen

Problem 1(a) $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ für $n \geq 0$ erfüllen dieselben Rekursionsbedingungen, da $f_o = \frac{1-1}{\sqrt{5}}$ und $f_1 = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$ gilt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
2^n\sqrt{5}f_n &= (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \\
&= (1+\sqrt{5})^{n-2}(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^{n-2}(1-\sqrt{5})^2 \\
&= (1+\sqrt{5})^{n-2}(2+2\sqrt{5}+4) - (1-\sqrt{5})^{n-2}(2-2\sqrt{5}+4) \\
&= 2(1+\sqrt{5})^{n-1} + 4(1+\sqrt{5})^{n-2} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1} - 4(1-\sqrt{5})^{n-2} \\
&= 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1} + 4(1+\sqrt{5})^{n-2} - 4(1-\sqrt{5})^{n-2} \\
&= 2^n\sqrt{5}\, f_{n-1} + 2^n\sqrt{5}\, f_{n-2}
\end{aligned}$$

und damit folgt $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. $\square$

Problem 1(b) Unterstellt, daß $\Phi = \lim_{n\to\infty} f_n/f_{n-1} > 0$ existiert. Nun gilt

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{f_{n+1}/f_n} \approx \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Unabhängig von den Anfangsbedingungen f_o und f_1 folgt dann im Grenzübergang $n \to \infty$

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Longrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Longrightarrow \Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Die Kettenbruchdarstellung ergibt sich aus $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

$\square$

Problem 1(c) Die beiden Summen stimmen offensichtlich überein. Auch gilt $f_o = 0$ und $f_1 = \binom{0}{0} = 1$ und etwa $f_2 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1$ sowie für $n \geq 0$

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-(k+1)}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-(k+1)}{k} + 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-(k+1)}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k} = f_n + f_{n+1} \end{aligned}$$

Die Fibonacci-Zahlen ergeben sich somit als Summen der Diagonal-Elemente im *Pascal*[15]schen Dreieck.

□

[15] Blaise Pascal (1623-1662)

Problem 1(d) Induktion liefert unmittelbar $\sum_{i=0}^{n} f_n = f_{n+2}$ und damit $\sum_{i=k}^{n} f_n = \sum_{i=0}^{n} f_n - \sum_{i=0}^{k-1} f_n = f_{n+2} - f_{k+1}$.

Induktion liefert $f_o^2 = f_o\, f_2$ für $n = 0$ und $\sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 = f_n\, f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1}\, f_{n+2}$ für $n > 0$. Auch geometrisch anhand der Fibonacci-Quadrate!

Induktion liefert $0 = 0$ für $n = 0$ und $\sum_{i=1}^{2(n+1)} f_i\, f_{i-1} = f_{2n}^2 + f_{2n+1}\, f_{2n} + f_{2n+2}\, f_{2n+1} = f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) + f_{2n+2}\, f_{2n+1} = f_{2n}\, f_{2n+2} + f_{2n+2}\, f_{2n+1} = f_{2n+2}(f_{2n} + f_{2n+1}) = f_{2n+2}^2$ für $n > 0$.

Zunächst gilt $f_{n+1} f_{n-1} = (-1)^n + f_n^2$, da Induktion $f_2\, f_o = 0 = (-1)^1 + f_1^2$ für $n = 1$ und $f_{n+2} f_n = (f_{n+1} + f_n) f_n = f_{n+1} f_n + f_n^2 = f_{n+1} f_n - (-1)^n + f_{n+1} f_{n-1} = (-1)^{n+1} + f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) = (-1)^{n+1} + f_{n+1}^2$ für $n > 1$ liefert. Damit gilt $\sum_{i=1}^{2n+1} f_i\, f_{i-1} = f_{2n}^2 + f_{2n+1}\, f_{2n} = f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) = f_{2n}\, f_{2n+2} = f_{2n+1}^2 - 1$.

Sei $s = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} f_i = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_{i-1}}{2^i} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_{i-2}}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_{i-1}}{2^{i-1}} + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_{i-2}}{2^{i-2}}$ also $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s + \frac{1}{4} s$ und damit $s = 2$. $\square$

Problem 2(a) Für $n = 1$ gilt $F_1 = 5 = 2 + 3 = 2 + F_o$ $\surd$

Für $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{n} F_i &= \prod_{i=0}^{n-1} F_i \, F_n = (F_n - 2)\, F_n \qquad \text{per Induktionsvoraussetzung} \\ &= \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2\end{aligned}$$

$\square$

Problem 2(b) Sei $t = \mathrm{ggT}(F_n, F_m)$ und etwa $n < m$. Dann gibt es wegen $t|F_n$ und $t|F_m$ Konstanten $v, w \in \mathbb{N}$ mit $F_n = v\,t$ und $F_m = w\,t$. Aus $F_m = 2 + \prod_{i=0}^{m-1} F_i = 2 + c\,F_n$ folgt aber $w\,t = 2 + c\,v\,t$. Damit ist t ein Teiler von 2, also $t = 1$ oder $t = 2$. Da aber alle Fermat-Zahlen ungerade sind, folgt $t = 1$.

Es gibt unendlich viele Fermat-Zahlen $(F_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, die paarweise relativ prim sind, d.h. paarweise verschiedene und damit insgesamt unendlich viele verschiedene Primfaktoren haben. $\square$

Problem 3(a) Sei $y_o' := f'(x_o)$ und $y_o'' := f''(x_o)$. Der gesuchte Schmiege-Kreis an (x_o, y_o) mit Mittelpunkt (ξ, η) und Radius ρ ist

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \rho^2$$

Für erste und zweite Ableitung der Funktionsgleichung $y = y(x)$ gilt

$$2(x-\xi) + 2(y-\eta)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-\xi}{y-\eta}$$

$$y'' = -\frac{(y-\eta) - (x-\xi)y'}{(y-\eta)^2} = -\frac{(y-\eta) + (x-\xi)\frac{x-\xi}{y-\eta}}{(y-\eta)^2} = -\frac{1+y'^2}{y-\eta}$$

speziell also

$$(x_o-\xi)^2 + (y_o-\eta)^2 = \rho^2, \qquad y_o' = -\frac{x_o-\xi}{y_o-\eta}, \qquad y_o'' = -\frac{1+y_o'^2}{y_o-\eta}$$

Aus $(x_o-\xi)^2 + (y_o-\eta)^2 = \rho^2$ und $y_o'(y_o-\eta) = -(x_o-\xi)$ folgt $\rho^2 = (y_o-\eta)^2(1+y_o'^2)$ und gleichgesetzt mit $\rho^2 = -y_o''(y_o-\eta)^3$ eben $(1+y_o'^2) = -y_o''(y_o-\eta)$ und damit

$$\eta = \eta(x_o) = y_o + (1+y_o'^2)/y_o''$$

und daher mit $y_o' = -(x_o - \xi)/(y_o - \eta) = (x_o - \xi)y_o''/(1 + y_o'^2)$

$$\xi = \xi(x_o) = x_o - (1 + y_o'^2)y_o'/y_o''$$

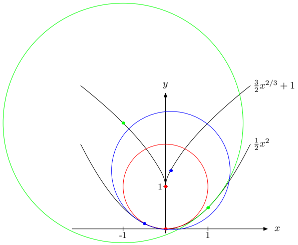
und endlich wegen $(y_o - \eta)^2 = (1 + y_o'^2)^2/y_o''^2$

$$\rho^2 = (1 + y_o'^2)^3/y_o''^2 \Rightarrow \rho = (1 + y_o'^2)^{3/2}/|y_o''| = 1/|\kappa|$$

mit der sogenannten *Krümmung* $\kappa = \kappa(x_o) = y_o''(1 + y_o'^2)^{-3/2}$.

Z.B. Für die Parabel $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ gilt $y' = x$ und $y'' = 1$. Damit ist $\xi = x - (1 - x^2)x = -x^3$ und $\eta = y + 1 + x^2 = \frac{3}{2}x^2 + 1 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\xi}^2 + 1$.

Evolvente $\frac{1}{2}x^2$ und Evolute $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\xi}^2 + 1$



beispielhaft: drei Schmiegekreise mit Mittelpunkt und Berührpunkt in jeweils derselben Farbe

□

Problem 3(b) Mit $y' = \frac{d\,y}{dx}$ ist $\dot{y} = \frac{d\,y}{dt} = \frac{d\,y}{dx}\frac{d\,x}{dt} = y'\,\dot{x}$, d.h. $y' = \dot{y}/\dot{x}$. Aus $\ddot{y} = \frac{d\,\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(y'\,\dot{x}) = \frac{d\,y'}{dt}\,\dot{x} + y'\,\ddot{x} = \frac{d\,y'}{dx}\frac{d\,x}{dt}\,\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,\ddot{x} = y''\,(\dot{x})^2 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,\ddot{x}$ folgt $y'' = \frac{\ddot{y}}{(\dot{x})^2} + \frac{\dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$ und damit $y'' = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{(\dot{x})^3}$.

Eingesetzt ergibt sich mit der Krümmung $\kappa = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}^3}$

$$\xi = x_o - \frac{y_o'}{y_o''}(1 + y_o'^2) = x - \dot{y}\,\frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}$$

$$\eta = y_o + \frac{1}{y_o''}(1 + y_o'^2) = y + \dot{x}\,\frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}$$

$$\rho = \frac{1}{|y_o''|}(1 + y_o'^2)^{3/2} = \frac{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}^3}{|\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}|} = \frac{1}{|\kappa|}$$

Z.B. Für den Einheitskreis gilt etwa

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und damit } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix},$$

so daß $\xi = x - x = 0$ und $\eta = y + -y = 0$ sowie $\rho = 1$ folgt. Der Einheitskreis hat die konstante Krümmung $\kappa = 1$. Seine Evolute entartet zum Punkt. □

Problem 3(c) Für den Steigungswinkel α der Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ in t_o gilt $\tan\alpha = \frac{\dot y}{\dot x}$ falls $\dot x(t_o) \neq 0$ bzw. $\cot\alpha = \frac{\dot x}{\dot y}$ falls $\dot y(t_o) \neq 0$.

Einerseits gilt für die Kurvenlänge $s = \psi(t_o) = \int_{t_{\min}}^{t_o} \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\, dt$ trivialerweise $\frac{d\,s}{dt} = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$ und mit $t = \psi^{\mathrm{inv}}(s)$ eben $\frac{d\,t}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$. Andererseits liefert implizite Differentation von gleichermaßen

$$\left.\begin{array}{c} F(t,\alpha) = \tan\alpha - \frac{\dot y}{\dot x} = 0 \\ \text{als auch} \\ F(t,\alpha) = \cot\alpha - \frac{\dot x}{\dot y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\,\alpha}{dt} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{F_t}{F_\alpha} = \frac{(\ddot y\dot x - \dot x\ddot y)/\dot x^2}{1+\tan^2\alpha} \\ -\frac{F_t}{F_\alpha} = \frac{(\ddot x\dot y - \dot x\ddot y)/\dot y^2}{-1-\cot^2\alpha} \end{array}\right\} = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{\dot x^2 + \dot y^2}$$

Zusammen ergibt sich

$$\kappa = \frac{d\,\alpha}{ds} = \frac{d\,\alpha}{dt}\,\frac{d\,t}{ds} = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}$$

und für die triviale Parametrisierung $x = t$ und $y = f(t)$ von $y = f(x)$

$$\kappa = \frac{1\cdot\ddot y - 0\cdot\dot y}{(1+\dot y^2)^{3/2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$\square$

Problem 3(d) Falls $\kappa = y''(1 + y'^2)^{-3/2}$ die Krümmung eines Funktionsgraphens ist, so gilt für den um (x_{t_o}, y_{t_o}) translatierten Graphen $y_t(x) = y(x - x_{t_o}) + y_{t_o}$ eben $y_t'(x) = y'(x - x_{t_o})$ und $y_t''(x) = y''(x - x_{t_o})$. Zusammen ergibt sich daher für die Krümmung κ_t des translatierten Graphen $\kappa_t(x) = \kappa(x - x_{t_o})$. $\square$

Problem 3(e) Einerseits gilt

$$x - \xi = \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$$

und andererseits

$$\frac{1}{\kappa}\,\frac{d\,y}{ds} = \frac{1}{\kappa}\,\frac{d\,y}{dx}\Big/\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}{y''}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{y''}(1 + y'^2).$$

Analog gilt einerseits

$$y - \eta = \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$$

und andererseits

$$\frac{1}{\kappa}\,\frac{d\,x}{ds} = \frac{1}{\kappa}\Big/\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}{y''}\,\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{y''}(1 + y'^2).$$

□

Problem 3(f) Zunächst gilt $\frac{d\,x}{ds} = \frac{\frac{d\,x}{dt}}{\frac{d\,s}{dt}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$ und $\frac{d\,y}{ds} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$ sowie $\frac{d\,\dot{x}}{ds} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$ und $\frac{d\,\dot{y}}{ds} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$. Insgesamt gelten also mit

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\,x}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{x}\,\frac{\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\
&= \frac{\ddot{x}\,\dot{y}^2 - \dot{x}\,\dot{y}\,\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2} = -\frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = -\kappa\,\frac{d\,y}{ds}
\end{aligned}$$

und analog mit

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\,y}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{y}\,\frac{\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\
&= \frac{\dot{x}^2\,\ddot{y} - \dot{x}\,\dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2} = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \kappa\,\frac{d\,x}{ds}
\end{aligned}$$

die beiden Frenet-Serret-Formeln für Kurven in der Ebene. □

Problem 3(g) Ableitungen nach s seien mit $'$ bezeichnet.

i) die Normalen der Evolvente sind Tangenten an die Evolute.
In $\xi(s) = x(s) - \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\,y}{ds}$ und $\eta(s) = y(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\,x}{ds}$ (s.o.) ist $\left(-\frac{d\,y}{ds}, \frac{d\,x}{ds}\right)$ gerade ein Normalen-Vektor $\vec{N}(s)$ der Evolvente. Aufgrund der Frenet'schen Formeln liefert Ableiten von $(\xi, \eta) = (x, y) + \frac{1}{\kappa}\vec{N}$ nach s

$$\frac{d\,\xi}{ds} = \frac{d\,x}{ds} - \frac{d\,\frac{1}{\kappa}}{ds}\frac{d\,y}{ds} - \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\,y}{ds^2} = \frac{d\,x}{ds} - \frac{d\,\frac{1}{\kappa}}{ds}\frac{d\,y}{ds} - \frac{1}{\kappa}\kappa\frac{d\,x}{ds} = -\frac{d\,\frac{1}{\kappa(s)}}{ds}\frac{d\,y}{ds}$$

$$\frac{d\,\eta}{ds} = \frac{d\,y}{ds} + \frac{d\,\frac{1}{\kappa}}{ds}\frac{d\,x}{ds} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\,x}{ds^2} = \frac{d\,y}{ds} + \frac{d\,\frac{1}{\kappa}}{ds}\frac{d\,x}{ds} + \frac{1}{\kappa}\kappa\frac{d\,y}{ds} = \frac{d\,\frac{1}{\kappa(s)}}{ds}\frac{d\,x}{ds}$$

oder kurz

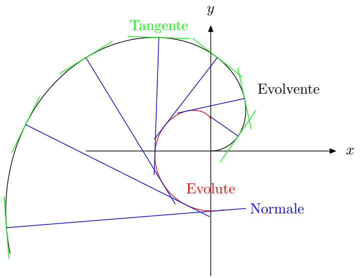
$$(\xi', \eta') = \left(\tfrac{1}{\kappa}\right)'\vec{N}$$

Die Tangente der Evolute in einem Punkt fällt mit den Normalen der Evolvente im entsprechenden Punkt zusammen! Genauer: Jede Normale der Evolvente berührt die Evolute im Krümmungsmittelpunkt!

ii) die Evolute ist die Hüllkurve der Normalen der Evolvente.
Zur Illustration sei die Archimedische Spirale $x(t) = c\,t\,\cos t$ und $y(t) = c\,t\,\sin t$ betrachtet. Dann gilt

$$\xi(t) = x - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} = c\,t\,\cos t - c\,(\sin t + t\,\cos t)\,\tfrac{1+t^2}{2+t^2}$$

$$\eta(t) = y + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} = c\,t\,\sin t + c\,(\cos t - t\sin t)\,\tfrac{1+t^2}{2+t^2}$$



□

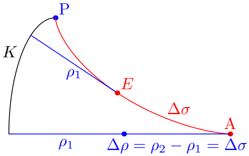
Problem 3(h) Die Evolute E sei wieder durch s parametrisiert. Dann gilt für die Kurven-Länge $\sigma(s)$ der Evolute wegen $|\vec{N}| = 1$

$$\sigma(s) = \sigma(s_o) + \int_{s_o}^{s} \sqrt{\xi'^2(\varsigma) + \eta'^2(\varsigma)}\, d\varsigma = \sigma(s_o) + \int_{s_o}^{s} \left|\left(\tfrac{1}{\kappa}\right)'\right| d\varsigma$$

und falls $\kappa \neq 0$ wegen $\left|\left(\tfrac{1}{\kappa}\right)'\right| = \rho'$ für den Krümmungsradius $\rho(s)$

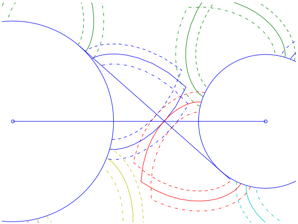
$$\sigma(s) - \sigma(s_o) = \int_{s_o}^{s} \left|\left(\tfrac{1}{\kappa}\right)'\right| d\varsigma = \int_{s_o}^{s} \rho'\, d\varsigma = \rho(s) - \rho(s_o)$$

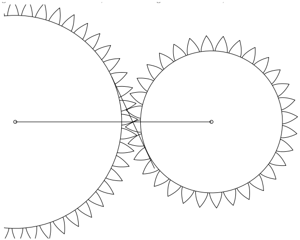
Die Bogenlänge der Evolute zwischen zwei Punkten ist somit gleich der Differenz der zugehörigen Krümmungsradien der Evolvente.

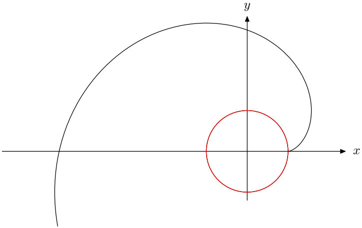


□

Problem 3(i) ...







□

Problem 4(a) Sei o.B.d.A. $r < R$. Die Doppelschaukel werde an der kurzen Aufhängung (links) angetrieben: der grüner Radius überstreicht einen Kreisbogen mit Radius r. Die lange rechte Aufhängung (resultierender blauer Radius) überstreicht einen Kreisbogen mit Radius R. Für jeden Punkt des grünen Bogens gilt dann: der Kreis mit Radius d um einen solchen Punkt schneidet den rechten Kreis!

Für beispielsweise $r = R$ und $d = D$ überstreicht jeder Punkt der Schaukelstange einen Bogen eines Kreises mit Radius $r = R$. □

Problem 4(b) Zunächst seien die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden zu bestimmen:

Schnittpunkte (x_s, y_s) des Kreises $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2$ mit der Geraden $a\,x + b\,y + c = 0$ sind – je nach Diskriminante Δ – gegeben durch

$$\begin{aligned} x_s &= (b^2\,x_o - a(c + b\,y_o) + b\,\Delta)/(a^2 + b^2) \\ y_s &= (a^2\,y_o - b(c + a\,x_o) - a\,\Delta)/(a^2 + b^2) \\ \Delta^2 &= (a^2 + b^2)r_o^2 - (a\,x_o + b\,y_o + c)^2 \end{aligned}$$

Zwei Kreise $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2$ haben zwei Schnittpunkte, falls $(r_2 - r_1)^2 < (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < (r_1 + r_2)^2$, d.h. falls der Abstand ihrer Mittelpunkte größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien ausfällt. Die Gerade durch die Schnittpunkte, die sogenannte *Chordale*, hat die Gleichung

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2)$$

Dann lassen sich die Schnittpunkte (x_s, y_s) zweier Kreise leicht als

Schnittpunkte der Chordalen mit einem der beiden Kreise bestimmen:

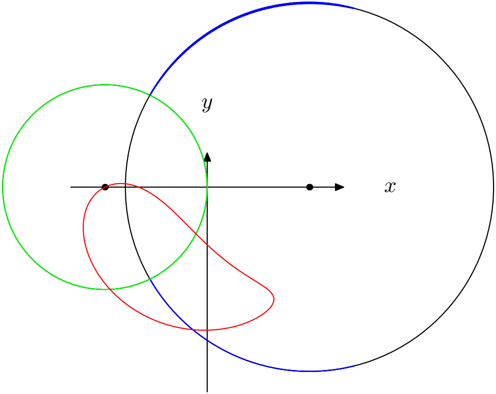
$$x_s = \frac{b^2 x_1 - a*(c+b*y_1) \pm b\Delta}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad a = x_2 - x_1 \qquad b = y_2 - y_1$$

$$\text{mit} \quad c = (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2)$$

$$y_s = \frac{a^2\, y_o - b(c + a\, x_o) \mp a\,\Delta}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad \Delta^2 = (a^2+b^2) r_1^2 - (a\, x_1 + b\, y_1 + c)^2$$

□

Problem 4(c) grün: angetriebene Seite der Doppelschaukel;
blau: resultierende andere Seite der Doppelschaukel;
rot: Kurve des Mittelpunktes auf der Schaukelstange bei gegebenen Parametern $r = 1.5$, $R = 2.7$, $d = 3$ und $D = 3$.

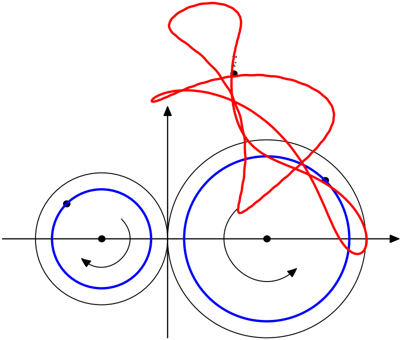


□

Problem 5(a) Beispielsweise mit $r = R$, $p = P$, $l = L$ und bei einer Phasenverschiebung von π beschreibt der Koppelpunkt eine Strecke.

Für entweder $p = 0$ oder $P = 0$ – je nach Antrieb – beschreibt der Koppelpunkt einen Kreisbogen.

Ansonsten können vielfältigste Koppel-Kurven entstehen.



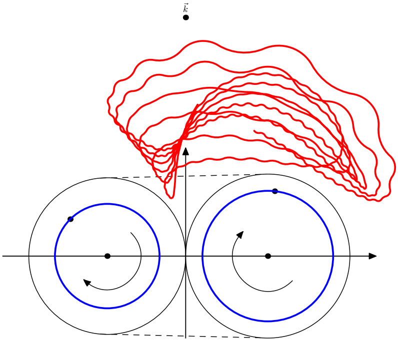
$\square$

Problem 5(b) Die Reichweite des Koppelpunktes verbietet naturgemäß bestimmte Kurven. Ansonsten können vielfältigste Koppel-Kurven entstehen.

□

Problem 5(c) Beispielsweise mit $r = R$, $p = P$, $l = L$ und bei einer Phasenverschiebung von 0 beschreibt der Koppelpunkt einen Kreis.

Wegen der möglichen Nichtperiodizität – falls das Übersetzungsverhältnis irrational ist – können jetzt – in unendlicher Zeit – ganze Flächen überstrichen werden: z.B. $r = 3$, $R = \pi$, $p = 2$ und $P = 2.5$.



□

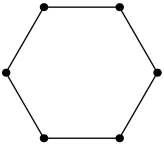
Problem 5(d) Die Reichweite des Koppelpunktes $\vec{k}$ verbietet naturgemäß bestimmte Kurven und Flächen.

$\square$

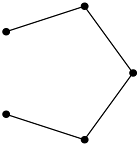
Problem 6(a) Angenommen, Alice (A) ist eine von **sechs** Gästen. A kennt entweder mindestens drei der anderen Gäste oder kennt mindestens drei der anderen Gäste nicht.

A kennt mindestens B, C und D der anderen Gäste Falls sich zwei der drei Gäste B, C und D kennen, etwa B und C, so sind zumindest A, B und C drei Gäste, die sich untereinander kennen. Anderenfalls sind sich eben B, C und D fremd.

A kennt mindestens B, C und D der anderen Gäste nicht Falls sich B, C und D nicht alle untereinander kennen, sind sich mindestens etwa B und C fremd, so daß sich A, B und C fremd sind. Anderenfalls kennen sich eben B, C und D untereinander.



Bei nur **fünf** Gästen können weder drei sich untereinander kennen noch drei sich fremd sein: A kenne B und C, während B und C jeweils D bzw. E kennen.



s.a. MathWorld oder TU Wien zu Ramsey numbers $R(m, n)$. □

Problem 6(b) Per vollständiger Induktion nach der Anzahl n der Händedrücke: sei G die Menge der Gäste und G_o bzw. G_1 die Menge der Gäste, die gerade bzw. ungerade viele Hände geschüttelt haben.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist die Anzahl der Leute, die ungerade viele Hände geschüttelt haben, null und damit gerade.

Induktionsschritt ($n \to n+1$): wenn der neue, $n+1$-te Händedruck werde zwischen $f \in G$ und $g \in G$ ausgetauscht. Es gibt nun vier, d.h. wegen Symmetrie drei Fälle, zwischen Gästen welcher Mengenzugehörigkeit der $n+1$-te Händedruck ausgetauscht wird!
$f, g \in G_o$, d.h. nach dem $n+1$-ten Händedruck gilt $f, g \in G_1$, so daß die nach Induktionsvoraussetzung gerade Anzahl von Gästen in G_1 um zwei wächst und damit wieder geradzahlig ist.
o.B.d.A. $f \in G_o$ und $g \in G_1$, d.h. nach dem $n+1$-ten Händedruck gilt $f \in G_1$ und $g \in G_o$, so daß die nach Induktionsvoraussetzung gerade Anzahl von Gästen in G_1 unverändert bleibt.
$f, g \in G_1$, d.h. nach dem $n+1$-ten Händedruck gilt $f, g \in G_o$, so daß die nach Induktionsvoraussetzung gerade Anzahl von Gästen in G_1 um zwei abnimmt und damit wieder geradzahlig ist. $\square$

Problem 7(a) Sei $(w_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ superincreasing. K sei ein Block des zu verschlüsselnden Klartextes, gegeben als Bit-Folge $K = (K_i)_{i=1,2,\ldots,n}$. Der Chiffriertext C ist dann

$$C = \sum_{i=1}^{n} K_i \, w_i$$

C wird wie folgt zum Dechiffrat D entschlüsselt:

```
for(i=n; i>0; i--)
   if (S>=w_i) { D_i=1; S-=w_i; } else D_i=0;
```

Dann gilt $D = K$, da $S \geq w_n$ nur möglich ist, wenn w_n einer der Summanden von S ist, d.h. wenn $K_n = 1$ gilt. Dagegen ist $S < w_n$ nur möglich, wenn w_n kein Summand von S ist, d.h. wenn $K_n = 0$ gilt. Nachdem S um w_n dekrementiert wurde, falls $S \geq w_n$, ergibt sich dieselbe Situation bzgl. w_{n-1}. usw. $\square$

Problem 7(b) Laut Voraussetzung gilt $w_i \in \{1, 2, \ldots, 255\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Alle superincreasing sequences, sis, können wie folgt lexikographisch aufsteigend aufgezählt werden:

w_1	w_2	w_3	w_4
1	2	4	8
1	2	4	$\vdots$
1	2	4	255

w_1	w_2	w_3	w_4
1	2	5	9
1	2	5	$\vdots$
1	2	5	255
1	2	$\vdots$	$\vdots$
1	2	251	255

w_1	w_2	w_3	w_4
1	3	5	10
1	3	5	$\vdots$
1	3	5	255
1	3	$\vdots$	$\vdots$
1	3	250	255
1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	125	127	254
1	125	127	255

und so weiter bis

w_1	w_2	w_3	w_4
2	3	6	12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
62	63	126	252
62	63	126	$\vdots$
62	63	126	255
62	63	127	253
62	63	127	$\vdots$
62	63	127	255
62	63	128	254
62	63	128	255
62	63	129	255
62	64	127	254
62	64	127	255
62	64	128	255

Nur zur Abkürzung sei $S = \{sis\}$, $S_x = \{sis > (x, *, *, *)\}$, $S_{x,y} =$

$\{sis > (x, y, *, *)\}$ und $S_{x,y,z} = \{sis > (x, y, z, *)\}$ gesetzt. Dann gilt

$$|S| = \sum_{(w_1,w_2,w_3)=(1,2,4)} \sum_{w_4=w_1+w_2+w_3+1=8}^{255} 1 + |S_{1,2,4}|\,.$$

Aus $w_4 = 255 = w_1 + w_2 + w_3 + 1$ folgt $w_3 = 255 - w_1 - w_2 - 1$ und

$$|S| = \sum_{(w_1,w_2)=(1,2)} \sum_{w_3=w_1+w_2+1}^{255-w_1-w_2-1} \sum_{w_4=w_1+w_2+w_3+1}^{255} 1 + |S_{1,2}|\,.$$

Aus $w_4 = 255 = w_1 + w_2 + w_3 + 1 = w_1 + w_2 + (w_1 + w_2 + 1) + 1 = 2\,w_1 + 2\,w_2 + 2$ folgt dann $2\,w_2 = 255 - 2\,w_1 - 2$ und daher

$$|S| = \sum_{w_1=1} \sum_{w_2=w_1+1}^{(255-2w_1-2)/2} \sum_{w_3=w_1+w_2+1}^{254-w_1-w_2} \sum_{w_4=w_1+w_2+w_3+1}^{255} 1 + |S_1|\,.$$

Aus $w_4 = 255 = w_1+w_2+w_3+1 = w_1+(w_1+1)+\bigl(w_1+(w_1+1)+1\bigr)+1 =$

$4\,w_1 + 4$ folgt dann $4\,w_1 = 255 - 4$ und daher

$$|S| = \sum_{w_1=1}^{(255-4)/4} \sum_{w_2=w_1+1}^{253/2-w_1} \sum_{w_3=w_1+w_2+1}^{254-w_1-w_2} \sum_{w_4=w_1+w_2+w_3+1}^{255} 1$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} \sum_{w_3=w_1+w_2+1}^{254-w_1-w_2} (255 - w_1 - w_2 - w_3) \\ &= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} \sum_{v_2=1}^{254-2w_1-2w_2} (255 - 2w_1 - 2w_2 - v_2) \\ &= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} \begin{array}{l} \big((255 - 2w_1 - 2w_2)(254 - 2w_1 - 2w_2) \\ - (255 - 2w_1 - 2w_2)(127 - w_1 - w_2)\big) \end{array} \end{aligned}$$

Zusammenfassen und mit $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ vereinfachen

$$\begin{aligned}
|S| &= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} (255 - 2w_1 - 2w_2)(127 - w_1 - w_2) \\
&= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} (255 - 2w_1 - 2w_2)(127 - w_1 - w_2) \\
&= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{w_2=w_1+1}^{126-w_1} (32385 - 509w_1 - 509w_2 + 4w_1w_2 + 2w_1^2 + 2w_2^2) \\
&= \sum_{w_1=1}^{62} \sum_{v_1=1}^{126-2w_1} \big((32385 - 1018w_1 + 8w_1^2) + (8w_1 - 509)v_1 + 2v_1^2\big) \\
&= \sum_{w_1=1}^{62} \big((32385 - 1018w_1 + 8w_1^2)(126 - 2w_1) \\
&\qquad + (8w_1 - 509)(63 - w_1)(127 - 2w_1) \\
&\qquad + \tfrac{1}{3}(126 - 2w_1)(127 - 2w_1)(252 - 4w_1 + 1)\big)
\end{aligned}$$

Zusammenfassen und mit $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$ vereinfachen liefert endlich $|S| = 20\,833\,953$. $\square$

Problem 7(c) Nach der vorstehenden Überlegung sticht die rekursive Struktur von superincreasing sequences ins Auge:
Zunächst entspricht jede sis $(w_i)_{i=1,2,\ldots}$ der *erweiterten sis* $(v_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ mit $v_o = 0$ und $v_i = w_i$ für $i = 1, 2, \ldots$, also einer sis mit nulltem Element. Dann entspricht jeder Folgen-Rest $(w_i)_{i=r,r+1,\ldots}$ einer sis $(w_i)_{i=1,2,\ldots}$ gerade der erweiterten sis $(v_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ mit $v_o = \sum_{j=1}^{r-1} w_j$ und $v_i = w_{r-1+i}$ für $i = 1, 2, \ldots$. Umgekehrt kann jede sis $(w_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ aufgefaßt werden als Verkettung ($\bowtie$) von zwei (erweiterten) sis's

$$\begin{aligned}(w_i)_{i=1,2,\ldots,n} \quad &\equiv \quad (u_i)_{i=1,2,\ldots,\nu} \bowtie (v_i)_{i=0,1,2,\ldots,n-\nu} \\ &\qquad \text{mit } u_i = w_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \nu \text{ und} \\ &\qquad v_o = \textstyle\sum_{j=1}^{\nu} w_j, v_i = w_{\nu+i} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n-\nu\end{aligned}$$

Sei $S_{w,n,s} := \Big\{(w_i)_{i=0,1,2,\ldots,n} \in \{sis\} : w_o = w, \sum_{j=0}^{n} w_j = s\Big\}$. Dann gilt

$$\{sis\} = \bigcup_{\varsigma=2^n-1}^{M} S_{o,n,\varsigma} = \bigcup_{\varsigma=2^n-1}^{M} \bigcup_{\sigma=2^\nu-1}^{m} S_{o,\nu,\sigma} \bowtie S_{\sigma,n-\nu,\varsigma} \text{ für } 1<\nu<n$$

wobei M die maximale Summe der n b-bit sis-Elemente und m das

maximale nullte Element einer sis mit $n-\nu$ Elementen und Element-Summe ς darstellen, d.h.
einerseits gilt $M=\max\{\sum_{i=1}^{n} w_i : (w_i)_{i=1,2,\ldots,n} \in \{sis\}, w_n < 2^b\} = 2^{b+2-n}-3+\sum_{i=b+2-n}^{b} 2^i = 2^{b+2-n}\big(1+\sum_{i=0}^{n-2} 2^i\big)-3 = 2^{b+2-n}\big(1+2^{n-1}-1\big)-3 = 2^{b+1}-3$ für $n>1$ und
andererseits $m=\max\{\sigma : S_{\sigma,n-\nu,\varsigma} \neq \emptyset\} = 2^{\nu-n}(\varsigma+1)-1$, da $S_{\sigma,n-\nu,\varsigma} \ni \big(\sigma,\sigma+1,2(\sigma+1),\ldots,2^{n-\nu-1}(\sigma+1)\big)$ mit Element-Summe $\sigma+(\sigma+1)\sum_{i=0}^{n-\nu-1} 2^i = \sigma+(\sigma+1)(2^{n-\nu}-1) = 2^{n-\nu}\sigma-1=\varsigma$, d.h. $\sigma \le 2^{\nu-n}(\varsigma+1)-1=m$. Dann gilt für $S=\{sis\}=S_{o,n,*}$

$$|S| = \sum_{\varsigma=2^n-1}^{M} |S_{o,n,\varsigma}| = \sum_{\varsigma=2^n-1}^{M} \sum_{\sigma=2^\nu-1}^{m} |S_{o,\nu,\sigma}| \cdot |S_{\sigma,n-\nu,\varsigma}| \text{ für } 1<\nu<n$$

und somit für beliebige $1<\nu<n$ die Rekursion in n

$$|S_{o,n,\varsigma}| = \sum_{\sigma=2^r-1}^{m} |S_{o,\nu,\sigma}| \cdot |S_{\sigma,n-\nu,\varsigma}| \text{ mit } |S_{\sigma,2,\varsigma}| = \lfloor \varsigma/2-1/4 \rfloor - 2\sigma$$

wobei $|S_{\sigma,2,\varsigma}| = |\{(\sigma,w_1,w_2) : \sigma<w_1, \sigma+w_1<w_2, \sigma+w_1+w_2=\varsigma\}| = |\{(\sigma,w_1,\varsigma-\sigma-w_1) : \sigma+1\le w_1<\varsigma/2-\sigma\}| = \lfloor \varsigma/2-1/4\rfloor - 2\sigma$.

Z.B. sei $n=4$ und $\nu=2$. Dann ist

$$|S_{0,4,\varsigma}| = \sum_{\sigma=2^2-1}^{m} |S_{0,2,\sigma}| \cdot |S_{\sigma,2,\varsigma}| \text{ mit } m = \lfloor \varsigma/4 - 3/4 \rfloor$$

$|S_{\sigma,2,\varsigma}| = |\{(\sigma, \sigma{+}1, \varsigma{-}2\sigma{-}1), (\sigma, \sigma{+}2, \varsigma{-}2\sigma{-}2), \ldots, (\sigma, \sigma{+}r, \varsigma{-}2\sigma{-}r)\}| = \lfloor \varsigma/2 - 3\sigma/2 - 1/4 \rfloor$, da $\sigma + r < \varsigma - 2\sigma - r \iff r < \varsigma/2 - 3\sigma/2$, also

$$|S_{0,4,\varsigma}| = \sum_{\sigma=3}^{\lfloor \varsigma/4-3/4 \rfloor} \lfloor \sigma/2 - 1/4 \rfloor \cdot \lfloor \varsigma/2 - 3\sigma/2 - 1/4 \rfloor$$

$\square$

Problem 7(d) Nachteilig sind die folgenden Eigenschaften:

- Bei Verwendung der ASCII-Codierung und Vielfachen von 8 als Blockgröße n bleibt die Buchstabenhäufigkeit erkennbar.
- Größere Block-Länge macht notwendig, immer größere Elemente der sis (mit $w_i = \mathcal{O}(2^i)$) beim Schlüsselaustausch zu übermitteln und immer größere Zahlen C beim Chiffrieren bzw. D beim Dechiffrieren handzuhaben:
  Höhere Sicherheit durch einen großeren Schlüsselraum geht also mit stark wachsenden Schlüssel-Längen (immer mehr immer größere Zahlen) einher.
- Höhere Sicherheit bedeutet zugleich, potentiell immer längere Chiffrate C übermitteln zu müssen.

$\square$

Problem 8(a) Es gilt $2^{3^{4^x}} = 2^{3^{2^{2x}}}$ und $4^{3^{2^x}} = (2^2)^{3^{2^x}} = 2^{2\cdot 3^{2^x}}$. Identität der Exponenten liefert

$$3^{2^{2x}} = 3^{(2^x)^2} = 2 \cdot 3^{2^x}$$

und Logarithmieren

$$(2^x)^2 \ln 3 = \ln 2 + 2^x \ln 3.$$

Wenn wir zur Abkürzung $y = 2^x$ setzen, ergibt sich die quadratische Gleichung

$$y^2 - y - \ln 2/\ln 3 = 0$$

mit den Lösungen $y_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 + \ln 2/\ln 3}$. Nun ist $y_2 < 0$, da ja $0.5 < \sqrt{0.25 + \ln 2/\ln 3}$. Wegen $y = 2^x$ ist die zugehörige Lösung obsolet und es bleibt nur

$$x = \log_2(0.5 + \sqrt{0.25 + \ln 2/\ln 3}).$$

□

Problem 8(b) Die Funktionalgleichung des Logarithmus liefert

$$\log_x x + 2\log_x y + \log_y y + 2\log_y x = 6,$$

vereinfacht also

$$2\log_x y + 2\log_y x = 4 \quad \text{bzw.} \quad \log_x y + \log_y x = 2$$

und mit $(\log_x y) \cdot (\log_y x) = \log_x x = 1$ überführt in Logarithmen zur Basis x eben

$$\log_x y + 1/\log_x y = 2.$$

Mit der Abkürzung $z = \log_x y$ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

mit den beiden Lösungen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$, d.h. $\log_x y = 1$ und damit $x = y$.

Die zweite Gleichung lautet damit

$$2\sin(3x) = 0,$$

also $3x = k\pi$ oder $x = y = k\frac{\pi}{3}$ für jedes ganzzahlige k. □

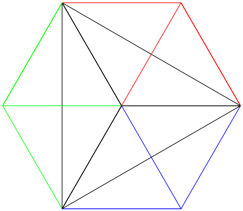
Problem 9(a) Im ersten Schritt können $5 + 7 = 12$, $4 + 14 = 18$, $3+21 = 24$, $2+28 = 30$, $1+35 = 36$ und $0+42 = 42$ Stücke entstehen. Weiteres Zerteilen der Teile inkrementiert die Anzahl $6n$ der Teile jeweils wieder um Vielfache von 6. Die Anzahl der entstehenden Teile selbst ist also Vielfaches von 6. $\square$

Problem 9(b) Klar, das Land können wir uns o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) als Kreis(scheibe) vorstellen. Betten wir darin eine kleinere Kreisscheibe mit drei Sektoren ein, so haben je zwei der vier Teile dieser Zerlegung eine gemeinsame Grenze. $\square$

Problem 9(c) Nein! Angenommen, es gäbe so eine Zerlegung. Entlang der Grenze von Teil 1 besuchen wir nacheinander Teil 2 bis Teil 5. Gehen wir nun von Teil 1 in Teil 2, dann in den Teil 4 (hat gemeinsame Grenze zu Teil 2) und zurück zum Augangspunkt in Teil 1. Dann zerlegt dieser Rundweg die Ebene in zwei Teile: innen und außen – ein so offensichtlicher wie schwer zu beweisender Umstand. Da Teil 3 und Teil 5 nicht zusammmen innen und auch nicht zusammen außen liegen können, können sie auch keine gemeinsame Grenze haben – im Widerspruch zur Annahme. □

Problem 9(d) Der Würfel liege im ersten Oktanten mit drei seiner Flächen in den Koordinaten-Ebenen. Die Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ seien die Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung.
Wenn jeweils etwa $\frac{a}{4}(1,1,0)+\vec{e}_z$, $\frac{a}{4}(0,3,1)+\vec{e}_x$ und $\frac{a}{4}(3,0,3)+\vec{e}_y$ die Symmetrie-Achsen der drei Zylinder sind, dann können die Zylinder im Würfel nicht wackeln. $\square$

Problem 9(e) Das fragliche Objekt wird von Rhomben (!) berandet.



Das Tetraeder hat hier vier sichtbare schwarze Kanten. Drei der vier Pyramiden haben rote, grüne und blaue Kanten. Die Kanten der Grundfläche sind die des Tetraeders und daher schwarz. Die vierte Pyramide ist hier verdeckt!

Es hat acht Ecken, nämlich die vier Ecken des Tetraeders plus die vier Spitzen der vier aufgesetzten Pyramiden. Es hat $4 \cdot 3/2 = 6$ Seiten, da von den insgesamt $3 \cdot 4 = 12$ Pyramiden-Seiten je zwei zu einer neuen Seite zusammenfallen. Es hat $3 \cdot 4 = 12$ Kanten, drei Kanten von jeder der vier Pyramiden. Es handelt sich um einen regelmäßigen Spat, also um einen Würfel. $\square$

Problem 9(f) Das, was wie ein Dreieck aussieht, ist kein Dreieck!

Die lange Seite des roten Dreiecks hat die Steigung $\frac{3}{8}$, Die lange Seite des grünen Dreiecks hat die Steigung $\frac{2}{5}$. Die Verbindungsstrecke des Eckpunktes links unten zum Eckpunkt rechts oben hat die Steigung $\frac{5}{13}$. Es gilt

$$\frac{2}{5} > \frac{5}{13} > \frac{3}{8}\,.$$

Der Flächeninhalt A_o des oberen Vierecks ist $A_o = \frac{1}{2}3{\cdot}8+\frac{1}{2}2{\cdot}5+3{\cdot}5 = 32$.

Der Flächeninhalt A_d des scheinbaren Dreiecks ist $A_d = \frac{1}{2}13{\cdot}5 = 32.5$.

Der Flächeninhalt A_u des unteren Vierecks (ohne Aussparung) ist $A_u = 33$. $\square$

Problem 10(a) Die Attribute können schrittweise zugeordnet werden: (alle Ausprägungen von Nationalität, Hausfarbe, Getränk, Rauch-Gewohnheit und Haustier sind angeführt!)[16]

	ganz links	Mitte links	mittig	Mitte rechts	ganz rechts
Hausfarbe					
Nationalität					
Getränk					
Rauchen					
Haustier					

ausgewertete Angaben

weiter reset

[16] Das Rätsel stammt angeblich von Albert Einstein, mehr dazu etwa unter `www.google.de/search?q=Einstein+Fisch`

Problem 11(a) Wenn er lügt, lügt er nicht; und wenn er die Wahrheit sagt, also nicht lügt, dann lügt er.

$\square$

Problem 11(b) Wenn falsch, dann richtig; wenn richtig, dann falsch.

Der Satz 'dieser Satz hat sechs Wörter' ist falsch wie ebenso sein Gegenteil 'dieser Satz hat nicht sechs Wörter' usw. □

Problem 11(c) Es ist anzunehmen, daß Zenon mit seinen Gedankengängen die Philosophie seines Lehrers Parmenides ('Es gibt nur das Unendlich Eine und alle Bewegung ist nur Illusion.') verteidigen wollte, s. http://de.wikipedia.org/wiki/Zenon_von_Elea □

Problem 11(d) Wenn das Krokodil das Kind zurückgibt, verletzt es seine eigene Regel; wenn es das Kind nicht zurückgibt, hat der Vater richtig prophezeit, so daß das Krokodil das Kind zurückgeben müßte.

□

Problem 11(e) Es geht um autologische und heterologische Wörter: Ein Wort heißt *autologisch*, wenn es auf sich selbst zutrifft. Sonst heißt es *heterologisch*.

Autologische Wörter sind z.B. kurz, aussprechbar, pentasyllabic, etc.

Heterologische Wörter sind z.B. lang, Adverb, das Weibliche, etc.

$\square$

Problem 11(f) Die Abbildung $f : [a, b] \to [d, e]$ definiert durch $f(x) = (e - d)(x - a)/(b - a) + d$ ist bijektiv. $\square$

Problem 12(a) Mit dem berühmten Cantor'schen Diagonalverfahren folgt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ wie ebenso $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}|$, $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}|$ etc. Übrigens ist $|[0,1] \cap \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}|$, weil $f : \mathbb{Q} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ gegeben durch $f(...z_3 z_2 z_1 z_0 . z_{-1} z_{-2} z_{-3}...) = 0.z_1 z_{-1} z_2 z_{-2} z_3 z_{-3}...$ bijektiv ist.

Per klassichem Widerspruchsbeweis von Cantor gilt $\aleph_o < \aleph_1 = |\mathbb{R}|$: angenommen etwa $[0,1] \subset \mathbb{R}$ sei abzählbar, d.h. es gibt r_i mit $[0,1] = \{r_i\} = \{r_1 = 0.z_{11} z_{12} z_{13}..., r_2 = 0.z_{21} z_{22} z_{23}..., r_3 = 0.z_{31} z_{32} z_{33}..., \ldots\}$. Sei nun $r_o = 0.z_{11} z_{22} z_{33}...$ und $r = 0.z'_{11} z'_{22} z'_{33}...$ wobei $z'_{ii} \neq z_{ii}$. Dann ist $r \in [0,1]$ verschieden von allen r_i im Widerspruch zur Annahme $[0,1] = \{r_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Die Abbildung $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0.a_1 a_2, a_3 \ldots, 0.b_1 b_2 b_3 \ldots)$ $= 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ ist bijektiv. Damit gilt $|[0,1] \times [0,1]| = |[0,1]|$.

$\square$

Problem 12(b) Der erste neue Gast wird untergebracht, indem jeder alte Gast in das Zimmer mit der nächsthöheren Zimmernummer umzieht. usw. □

Problem 12(c) Äquivalent ist das Katalog-Paradox: Eine Bibliothek erstellt einen Katalog K aller Kataloge, die sich nicht selbst katalogisieren. Enthält K sich selbst?

$\square$

Problem 12(d) Die Kugel heißt daher *equi-decomposable*.
Übrigens reicht es, die Stücke nur Rotationen und Translationen zu unterwerfen. Und für die Kugel reichen fünf Teilstücke.

Verallgemeinert gilt: je zwei beliebige beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind equi-decomposable. (Das gilt in dieser Allgemeinheit übrigens nicht im $\mathbb{R}^2$.)

Die 'Paradoxien' beruhen auf dem Auswahl-Axiom. Beweis-Idee s.
`http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox` (englisch)
`http://de.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox` (deutsch).

□

Lösungen der Aufgaben

Lösung zu Aufgabe: Sicherlich sind $y(x) = x$ für alle reellen x (triviale) Lösungen. Nicht-trivial sind die beiden Lösungen $y(2) = 4$ und $y(4) = 2$.

Offensichtlich liegen alle Lösungen außerhalb der Hauptdiagonalen symmetrisch zu dieser. Ob es neben diesen unendlich vielen Lösungen weitere (nicht-triviale) Lösungen gibt, ist uns nicht klar.

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Jedes x mit $\sin x = 1$ ist sicher keine Lösung.

Für die restlichen x gilt $-1 \leq \sin x < 1$ sowie $0 \leq \sin^2 x$ und daher $1 \leq 2^{\sin^2 x}$. Also existieren wegen

$$\sin x < 1 \leq 2^{\sin^2 x}$$

keine (weiteren) Lösungen. Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Sei x, y bzw. z die Anzahl der Geschenke à 10DM, 50DM bzw. 60DM. Dann gilt einerseits $x + y + z = 20$, andererseits $10x + 50y + 60z = 720$ oder $x + 5y + 6z = 72$. Subtraktion

$$\begin{aligned} x + 5y + 6z &= 72 \\ x + y + z &= 20 \end{aligned}$$

eliminiert x und liefert $4y + 5z = 52$. Von $z \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ sind aber nur $z \in \{0, 4, 8\}$ möglich. Damit ergeben sich Paare

$$(y, z) \in \{(13, 0), (8, 4), (3, 8)\}$$

und zusammen mit $x + y + z = 20$ eben Lösungen

$$(x, y, z) \in \{(7, 13, 0), (8, 8, 4), (9, 3, 8)\}.$$

Die erste Lösung scheidet aus, weil der Korb dann nur zwei statt drei Geschenk-Arten enthält. Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Gesucht sind $x, y \in N$ mit $x^3 + y^3 = (x + y)^2$. Mit (x, y) ist wegen Symmetrie auch (y, x) Lösung. Eine offensichtliche Lösung ist $(x, y) = (1, 1)$. Sei $y = 1$. Dann ist $x^3 - (x + 1)^2 + 1 = 0 = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1)$. Damit sind auch $(0, 1)$, $(2, 1)$ und $(-1, 1)$ sowie $(1, 0)$, $(1, 2)$ und $(1, -1)$ Lösungen.

$y = 2$ führt wieder auf $x \in \{-2, 1, 2\}$ und damit auf schon bekannte Lösungen.

Sei nun $y = 3$ und damit $f(x) = x^3 + 27 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = g(x)$. Offensichtlich ist $f(2) = 35 > 25 = g(2)$ und es gilt $f'(x) = 3x^2 > 2x + 6 = g'(x)$ zumindest für alle $x \geq 2$. Also $f(x) > g(x)$ für $x \geq 2$. Damit existieren keine Lösungen der Form $(x, 3)$ bzw. $(3, y)$.

Für $n \geq 3$ gilt nun $f(x) = x^3 + n^3 > (x + n)^2 = g(x)$ für $x \geq n - 1$, da offensichtlich $f(n - 1) = (n - 1)^3 + (n + 1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 2n^3 + 6n > 4n^2 = (n - 1 + n + 1)^2 = g(n - 1)$ für $n \geq 3$ und da $f'(x) = 3x^2 > 2(x + n) = g'(x)$ für $x \geq n - 1$.

Eleganter ist da schon die folgende Lösung.

Sei $x = z - \Delta$ und $y = z + \Delta$ eben für $z = (x+y)/2$ und $\Delta = (y-x)/2$. Dann gilt

$$x^3 + y^3 = (z-\Delta)^3 + (z+\Delta)^3 = (2z)^2 = (z - \Delta + z + \Delta)^2 = (x+y)^2.$$

Vereinfacht führt dies auf die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 3\Delta^2 = 0$$

mit der Lösung $z = 1 \pm \sqrt{1 - 3\Delta^2}$. Für reelle Lösungen notwendig ist also $\Delta^2 \leq 1/3$ oder eben $\Delta < 1/\sqrt{3}$.
Δ ist der halbe Abstand von ganzen Zahlen, also $\Delta = 1/2$ sowie

$$z = 3/2 \text{ und damit } x = 1 \text{ und } y = 2$$

oder

$$z = 1/2 \text{ und damit } x = 0 \text{ und } y = 1.$$

oder auch $\Delta = 0$ und damit $z = 2$ sowie $x = 2 = y$. Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: $f(x)$ ist prim für $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 40\}$. Dagegen ist $f(41) = 41 \cdot 43$ nicht prim, was alles schon Euler wußte.
Ob es unendlich viele prime Funktionswerte natürlicher Argumente gibt, ist (uns) nicht bekannt. Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Aus $|p^2-q| = |p+q|$ folgt entweder $p^2-q = p+q$ oder $p^2 - q = -p - q$.

Der zweite Fall liefert wegen $p^2 + p = 0$ keine Lösung.

Im ersten Fall gilt $2q = p^2 - p$ oder eben $q = \frac{p(p-1)}{2}$. Da q prim, ist einer der beiden Faktoren in $p\frac{p-1}{2}$ oder $\frac{p}{2}(p-1)$ notwendigerweise 1.

$p = 1 \Rightarrow q = 0$ scheidet aus.
$\frac{p-1}{2} = 1 \Rightarrow p = 3$ und $q = 3$ ist eine Lösung.
$\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$ und $q = 0$, scheidet aus.
$p - 1 = 1 \Rightarrow p = 2$ und $q = 1$ scheidet aus, da q nicht prim.

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Offensichtlich gilt

$$6g = b - 5 \quad \text{und} \quad 7g = b + 8.$$

Subtraktion eliminiert b und liefert

$$g = 13.$$

Dann ist

$$b = 6g + 5 = 83 = 7g - 8.$$

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: $A(2,1) = A(1,A(2,0)) = A(1,A(1,1)) = A(1,A(0,A(1,0))) = A(1,A(1,0)+1) = A(1,A(0,1)+1) = A(1,3) = A(0,A(1,2)) = A(1,2)+1 = A(0,A(1,1))+1 = A(1,1)+2 = A(0,A(1,0))+2 = A(1,0)+3 = A(0,1)+3 = 5$

Mehr dazu siehe
http://public.logica.com/~stepneys/cyc/a/ackermnn.htm

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Per Potenzrechnung gilt $12^{x^2+x} = 5$. Logarithmieren ergibt

$$(x^2 + x) \ln 12 = \ln 5$$

(jeder andere Logarithmus tut's natürlich auch) und damit die quadratische Gleichung

$$x^2 + x - \ln 5 / \ln 12 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{0.25 + \ln 5 / \ln 12} \approx -\frac{1}{2} \pm 0.9475.$$

Näherungsweise ergeben sich also die beiden Lösungen

$$x_1 \approx 0.4475 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -1.4475.$$

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Es gilt

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x} = (x^{1/2})^{x} = x^{x/2}.$$

Falls $x \neq 1$ liefert Logarithmieren

$$\sqrt{x} = x/2$$

und damit $x^2 = x/4$ mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 4$.

Zusammen mit der Lösung $x = 1$ gibt es also drei Lösungen.

Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Seien a und b die Dezimalziffern von x sowie A, B und C diejenigen von x^2. Dann ist wegen $U(x^2) = U^2(x)$

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a + b)^2 = 100A + 10B + C$$
$$100b^2 + 20ab + a^2 = (10b + a)^2 = 100C + 10B + A$$

Da sowohl $(10a+b)^2$ als auch $(10b+a)^2$ dreistellig sind, folgt $a, b \leq 3$ sowie $(a, b) \neq (3, 3)$, da $33^2 = 1089$ vier- und nicht dreistellig ist. Damit ist also $20ab < 100$ und Koeffizienten-Vergleich der Dezimal-Ziffern liefert $a^2 = A$ und $b^2 = C$ und damit $2ab = B$.

Grundsätzlich gilt: Mit x ist auch $U(x)$ eine Lösung. Aus $U(x^2) = U^2(x)$ folgt nämlich $U^2(x) = U(x^2) = U(U^2(U(x))$ und nach Anwendung von U eben $U(U^2(x)) = U^2(U(x))$.

Offensichtlich sind $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)$ Lösungen. Dagegen ist $(2, 3)$ keine Lösung, da $2ab = 12$ keine Ziffer ist. Insgesamt verbleiben also **acht** Lösungen. Ende Aufgabe

Lösung zu Aufgabe: Der Mittelpunkt des linken Viertelkreises liege im Ursprung. Dann liegt der Mittelpunkt des rechten Viertelkreises in (R, R). Für den Mittelpunkt $\vec{m} = (x, y)$ des einbeschriebenen Kreises gilt

$$y = r \quad \text{und} \quad |(R, R) - \vec{m}| = R + r \quad \text{sowie} \quad |\vec{m}| = R - r$$

Eingesetzt ergibt sich somit

$$(R - x)^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \quad \text{und} \quad x^2 + r^2 = (R - r)^2$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert

$$(R - x)^2 = 4rR \quad \text{und} \quad R^2 - 2rR = x^2.$$

Durch Auflösen nach x entsteht die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 2xR - R^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $x_1 = R$ und $x_2 = -R/3$, woraus sich endlich $r = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2)$ oder eben $r = \frac{4}{9}R$ ergibt.

Vielleicht gefällt auch folgende Lösung:

Die y-Achse verlaufe tangential zum rechten Viertelkreis und $-x$ sei die Abszisse des gesuchten Mittelpunktes. Pythagoras für das rechtwinklige (Koordinaten-) Dreieck dieses Mittelpunktes liefert

$$x^2 + r^2 = (R - r)^2 = R^2 - 2Rr + r^2$$

und daher $\qquad x = \sqrt{R^2 - 2Rr} \qquad$ bzw. $\qquad x^2 = R^2 - 2Rr.$

Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse den Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem des rechten Viertelkreises verbindet, liefert

$$R + x)^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2,$$

ausmultipliziert $R^2 + 2Rx + x^2 + R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2$. Unter Verwendung von $x^2 = R^2 - 2Rr$ ergibt sich vereinfacht

$$2Rx + 2x^2 = 2Rr \qquad \text{oder} \qquad x^2 + Rx = Rr.$$

x einsetzen liefert $R^2 - 2Rr + Rx = Rr$, vereinfacht $Rx = 3Rr - R^2$ bzw.

$$\sqrt{R^2 - 2Rr} = x = 3r - R,$$

also $R^2 - 2Rr = 9r^2 - 6rR + R^2$ und damit $r = \frac{4}{9}R$. Ende Aufgabe